



Artikel Penelitian

Prediksi Defleksi Balok Kantilever dengan Beban Terdistribusi Menggunakan Physics-Informed Neural Networks

Hendery Dahlan^a^a Departemen Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Andalas, Kampus Unand Limau Manis, Padang 25163

INFORMASI ARTIKEL

Sejarah Artikel:

Diterima Redaksi: 01 Juni 2026

Revisi Akhir: 12 Juni 2026

Diterbitkan Online: 26 Juni 2026

KATA KUNCI

Physics-Informed Neural Networks (PINNs)

Balok Euler–Bernoulli

Balok kantilever

Defleksi balok

Mekanika struktur

KORESPONDENSI

E-mail:

henderydahlan@eng.unand.ac.id

A B S T R A C T

Beam deflection prediction is one of the fundamental problems in structural mechanics and is commonly solved using analytical solutions or numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM). Although these conventional numerical methods provide accurate solutions, they require spatial discretization, which increases computational complexity for certain engineering problems. Physics-Informed Neural Networks (PINNs) offer an alternative approach by incorporating physical laws directly into the neural network training process, enabling the solution of differential equations without relying on mesh generation. This study aims to apply PINNs to predict the deflection distribution of an Euler–Bernoulli cantilever beam subjected to a uniformly distributed load. The governing differential equation and boundary conditions are embedded into the learning framework to ensure that the predicted solution satisfies the underlying physical principles. The model performance is evaluated by comparison with the analytical solution using the Root Mean Square Error (RMSE), Mean Absolute Error (MAE), coefficient of determination (R^2), and maximum relative error. The results demonstrate that the proposed PINNs model accurately predicts the beam deflection distribution, exhibiting excellent agreement with the analytical solution. These findings indicate that PINNs provide an effective and promising computational approach for beam deflection analysis and have significant potential as an alternative to conventional numerical methods for solving structural mechanics problems.

1. PENDAHULUAN

Analisis defleksi balok merupakan kajian fundamental dalam mekanika struktur karena defleksi dipakai untuk menilai kekakuan dan stabilitas elemen struktur, sekaligus menjadi parameter penting dalam evaluasi serviceability, kinerja, dan keamanan desain; berbagai studi dan teks menunjukkan bahwa defleksi berkaitan langsung dengan flexural rigidity, bending stiffness yang mengendalikan performa struktur [1-3]. Pada aplikasi teknik, prediksi defleksi

diperlukan pada poros untuk menghitung deformasi dan critical speed, pada rangka dan komponen balok untuk memastikan integritas struktur dan memenuhi kriteria serviceability, pada jembatan untuk pemantauan kondisi, deteksi kerusakan dini, dan penilaian keselamatan [4], pada lengan robot fleksibel untuk kontrol gerak, pengurangan getaran, dan akurasi posisi, serta pada sayap pesawat untuk memperkirakan defleksi *in-flight* secara akurat tanpa uji terbang yang mahal [5].

Teori Euler–Bernoulli merupakan model klasik yang masih sangat luas dipakai untuk analisis

lentur balok karena sederhana dan efektif untuk balok ramping, dengan asumsi utama bahwa penampang yang semula tegak lurus sumbu netral tetap datar dan tetap tegak lurus terhadap sumbu netral setelah deformasi [6-8]. Dalam formulasi ini, pengaruh geser transversal diabaikan, sehingga defleksi balok dapat dimodelkan melalui persamaan diferensial orde empat yang menghubungkan beban luar dengan bentuk lendutan balok [9]. Sejumlah sumber juga menegaskan bahwa asumsi “*plane sections remain plane*” adalah ciri dasar teori ini dan menjadi dasar pemakaian Euler–Bernoulli dalam berbagai analisis statik maupun dinamik balok [10].

Persamaan Euler–Bernoulli dapat diselesaikan secara analitik untuk kasus-kasus yang sederhana, dan solusi tertutup/closed-form memang tersedia untuk beberapa konfigurasi dasar serta kondisi batas klasik [2]. Namun, ketika struktur menjadi lebih kompleks—misalnya memiliki geometri rumit, discontinuities, nonlinearity, atau banyak derajat kebebasan—analytical solution sering tidak tersedia atau menjadi tidak praktis, sehingga penyelesaiannya umumnya beralih ke metode numerik. Dalam konteks itu, Finite Element Method (FEM) muncul sebagai pendekatan standar dan sangat luas dipakai dalam analisis struktur karena mampu menangani geometri serta kondisi batas yang kompleks, meskipun tetap bergantung pada diskritisasi dan biaya komputasi [11].

Meskipun FEM dikenal efektif untuk analisis struktur yang kompleks, penerapannya umumnya terkait dengan masalah geometri/boundary condition yang rumit atau adanya discontinuities pada elemen struktur, sebagaimana tercermin dari studi tentang *arbitrary beam structures, multiple geometric or material discontinuities*, dan analisis geometrik nonlinier [2]. Dari konteks tersebut, diskritisasi domain, pembangkitan mesh, dan penyusunan matriks kekakuan dapat dipahami sebagai bagian dari proses numerik FEM (*inferensi dari karakter metode dan fokus studi-studi tersebut*), sehingga pada geometri kompleks atau skala besar biaya komputasi cenderung meningkat [2].

Kualitas mesh memang sangat menentukan akurasi FEM: mesh yang buruk atau terdistorsi dapat

meningkatkan galat, memperlambat konvergensi, menurunkan stabilitas numerik, bahkan memicu kegagalan komputasi, sedangkan mesh yang halus dan berkualitas tinggi cenderung memperbaiki akurasi tetapi menambah biaya komputasi dan kompleksitas pemodelan [3].

Perkembangan deep learning membuka jalur baru untuk menyelesaikan persamaan diferensial karena jaringan saraf dapat dilatih sebagai aproksimator fungsi yang mengintegrasikan pengetahuan fisika langsung ke dalam proses belajar [12, 13]. Dalam konteks itu, *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) menjadi pendekatan yang menggabungkan persamaan diferensial pengatur, kondisi batas, dan kondisi awal ke dalam loss function, sehingga solusi yang dipelajari tetap selaras dengan hukum fisika sistem [13, 14]. Sejumlah kajian juga menegaskan bahwa PINNs digunakan untuk menyelesaikan masalah forward dan inverse pada PDE/ODE, terutama ketika data terbatas dan integrasi kendala fisik diperlukan agar prediksi tetap fisik-konsisten.

Berbeda dengan jaringan saraf konvensional yang terutama belajar dari data, PINNs memanfaatkan automatic differentiation untuk meminimalkan residual persamaan diferensial sambil tetap memenuhi kendala fisik sistem [12-14]. Pendekatan ini menjadikan PINNs salah satu metode penting dalam *scientific machine learning* untuk menyelesaikan berbagai persoalan *forward* maupun *inverse* pada persamaan diferensial parsial [15].

Berdasarkan keunggulan tersebut, penelitian ini mengusulkan penggunaan PINNs untuk memprediksi defleksi balok kantilever berdasarkan persamaan Euler–Bernoulli sebagai alternatif pendekatan numerik berbasis mesh seperti FEM. Kinerja model PINNs kemudian dievaluasi dengan membandingkan hasil prediksi terhadap solusi analitik Euler–Bernoulli menggunakan metrik kuantitatif, seperti *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Error* (MAE), koefisien determinasi (R^2), dan galat relatif maksimum, sehingga tingkat akurasi model dapat dinilai secara komprehensif.

2. METODOLOGI

2.1 Studi Kasus Penelitian

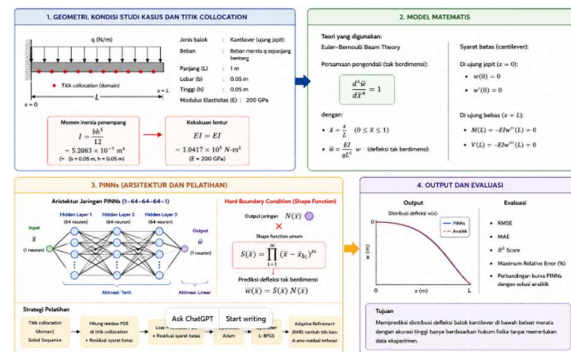
Metodologi penelitian yang digunakan dalam penelitian ini ditunjukkan pada Gambar 1. Penelitian diawali dengan mendefinisikan studi kasus berupa balok kantilever dengan panjang 1,0 m, lebar penampang 0,05 m, tinggi penampang 0,05 m, modulus elastisitas 200 GPa, serta beban terdistribusi merata sebesar 1000 N/m. Domain balok didiskretisasi menggunakan titik-titik *collocation* yang dibangkitkan dengan metode *Sobol Sequence* untuk memperoleh sebaran titik yang lebih merata pada seluruh domain komputasi.

Selanjutnya, model matematis dibangun berdasarkan teori balok Euler–Bernoulli dalam bentuk tak berdimensi dengan persamaan pengendali $d^4\bar{w}/d\bar{x}^4 = 1$. Kondisi batas diterapkan pada ujung jepit berupa defleksi dan rotasi bernilai nol, sedangkan pada ujung bebas diterapkan kondisi momen lentur dan gaya geser sama dengan nol. Pendekatan tak berdimensi digunakan untuk meningkatkan stabilitas proses pelatihan jaringan saraf.

Model Physics-Informed Neural Networks (PINNs) yang digunakan memiliki arsitektur 1–64–64–64–1, terdiri atas satu neuron input, tiga hidden layer yang masing-masing berisi 64 neuron dengan fungsi aktivasi Tanh, serta satu neuron output yang menghasilkan defleksi tak berdimensi. Untuk memastikan kondisi batas esensial terpenuhi secara langsung, pada keluaran jaringan diterapkan *hard boundary condition* menggunakan shape function, sehingga solusi yang dihasilkan secara otomatis memenuhi syarat batas pada ujung jepit.

Proses pelatihan dilakukan dengan meminimalkan fungsi loss yang merupakan kombinasi antara residual persamaan diferensial Euler–Bernoulli dan residual kondisi batas. Setelah proses pelatihan selesai, hasil prediksi PINNs dievaluasi dengan membandingkannya terhadap solusi analitik menggunakan parameter *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Error* (MAE), koefisien determinasi (R^2), dan *Maximum Relative Error*, sehingga tingkat akurasi model dalam

memprediksi distribusi defleksi balok dapat dinilai secara kuantitatif.



Gambar 1. Metodologi penelitian balok kantilever dengan beban terdistribusi merata serta alur penerapan PINNs

2.2 Model Balok Euler–Bernoulli

Pada penelitian ini digunakan balok kantilever dengan panjang L yang menerima beban terdistribusi merata sebesar q . Material balok diasumsikan homogen, isotropik, dan berperilaku elastis linier sesuai dengan asumsi teori Euler–Bernoulli [1]. Persamaan diferensial dinyatakan sebagai

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q \quad (1)$$

dimana:

E = Modulus elastisitas (Pa)
 I = Momen inersia penampang (m^4)
 q = Beban terdistribusi (N/m)
 $w(x)$ = Defleksi balok (m)

Untuk balok kantilever digunakan kondisi batas, yaitu pada ujung jepit

$$w(0) = 0$$

$$\frac{dw(0)}{dx} = 0$$

Sedangkan pada ujung bebas

$$\frac{d^2 w(L)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d^3 w(L)}{dx^3} = 0$$

2.3 Solusi Analitik

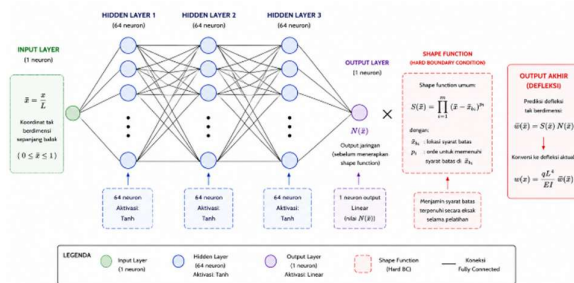
Sebagai acuan validasi, digunakan solusi analitik balok kantilever dengan beban terdistribusi merata [16]. Defleksi balok diberikan oleh

$$w(x) = \frac{qx^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (2)$$

Persamaan tersebut digunakan sebagai pembanding terhadap hasil prediksi PINNs sehingga tingkat akurasi model dapat dievaluasi secara kuantitatif.

2.4 Physics-Informed Neural Networks (PINNs)

Physics-Informed Neural Networks (PINNs) merupakan pendekatan pembelajaran mendalam (*deep learning*) yang mengintegrasikan hukum-hukum fisika ke dalam proses pelatihan jaringan saraf. Berbeda dengan jaringan saraf konvensional yang hanya memanfaatkan data sebagai target pembelajaran, PINNs menggunakan persamaan diferensial pengendali beserta kondisi batas sebagai bagian dari fungsi objektif (*loss function*). Dengan demikian, solusi yang dihasilkan tidak hanya menyesuaikan data, tetapi juga memenuhi hukum fisika yang mengatur sistem. Arsitektur *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) untuk penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Arsitektur PINNs untuk memprediksi defleksi balok kantilever.

Pada Gambar 2 terlihat bahwa jaringan saraf dirancang untuk memprediksi distribusi defleksi balok kantilever berdasarkan teori balok Euler–Bernoulli melalui pendekatan berbasis fisika (*physics-informed learning*). Arsitektur jaringan menggunakan konfigurasi 1–64–64–64–1, yang terdiri atas satu neuron pada lapisan input, tiga *hidden layer* yang masing-masing memiliki 64

neuron dengan fungsi aktivasi *Hyperbolic Tangent* (*Tanh*), serta satu neuron pada lapisan output dengan fungsi aktivasi linear.

Variabel masukan jaringan berupa koordinat tak berdimensi sepanjang balok yang dinyatakan sebagai

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, 0 \leq \bar{x} \leq 1$$

dengan x merupakan koordinat sepanjang balok dan L adalah panjang balok. Proses normalisasi dilakukan untuk mengurangi pengaruh skala geometri terhadap proses pelatihan sehingga pembelajaran jaringan menjadi lebih stabil.

Pada setiap *hidden layer*, proses transformasi data dilakukan menggunakan fungsi aktivasi *Hyperbolic Tangent* (*Tanh*). Secara umum, keluaran pada lapisan ke- l dinyatakan sebagai

$$a^{(l)} = \tanh(W^{(l)}a^{(l-1)} + b^{(l)}) \quad (2)$$

dengan:

- $a^{(l)}$ = vektor keluaran pada lapisan ke- l ,
- $W^{(l)}$ = matriks bobot (*weights*) pada lapisan ke- l ,
- $b^{(l)}$ = vektor bias (*biases*) pada lapisan ke- l ,
- $\tanh(\cdot)$ = fungsi aktivasi *Hyperbolic Tangent*.

Pada penelitian ini, tiga *hidden layer* masing-masing terdiri atas 64 neuron sehingga proses transformasi dilakukan secara berulang hingga menghasilkan keluaran jaringan pada lapisan output.

Fungsi aktivasi ini dipilih karena bersifat kontinu dan memiliki turunan yang kontinu sehingga sesuai untuk menghitung turunan hingga orde keempat yang dibutuhkan pada persamaan Euler–Bernoulli.

Secara matematis, keluaran jaringan saraf dapat dituliskan sebagai

$$N(\bar{x}) = W^{(4)} \tanh(W^{(3)} \tanh(W^{(2)} \tanh(W^{(1)} \bar{x} + b^{(1)}) + b^{(2)}) + b^{(3)}) + b^{(4)} \quad (4)$$

dengan W menyatakan bobot (*weights*) dan b menyatakan bias (*biases*) pada setiap lapisan jaringan.

Keluaran jaringan $N(\bar{x})$ belum secara langsung memenuhi kondisi batas balok kantilever. Oleh karena itu, penelitian ini menerapkan *Hard Boundary Condition* menggunakan *shape function* sehingga solusi prediksi dinyatakan sebagai

$$\bar{w}(\bar{x}) = S(\bar{x}) N(\bar{x}) \quad (3)$$

dengan $S(\bar{x})$ merupakan *shape function* yang dirancang untuk memenuhi kondisi batas esensial pada ujung jepit secara otomatis selama proses pelatihan. Pendekatan ini memastikan bahwa solusi yang dihasilkan selalu memenuhi syarat batas tanpa memerlukan penalti tambahan pada fungsi *loss*.

Karena keluaran jaringan masih berupa defleksi tak berdimensi, maka hasil prediksi dikonversi menjadi defleksi aktual menggunakan hubungan

$$w(x) = \frac{qL^4}{EI} \bar{w}(\bar{x}) \quad (4)$$

dengan q adalah beban terdistribusi merata, E merupakan modulus elastisitas material, dan I adalah momen inersia penampang. Persamaan tersebut menghasilkan distribusi defleksi balok dalam satuan meter yang selanjutnya digunakan sebagai hasil prediksi PINNs.

2.5 Fungsi Loss dan Proses Pelatihan

Setelah arsitektur jaringan dibangun, parameter jaringan yang terdiri atas bobot dan bias diperbarui melalui proses pelatihan dengan meminimalkan fungsi *loss*. Pada penelitian ini, fungsi *loss* dibangun berdasarkan residual persamaan diferensial Euler–Bernoulli dan residual kondisi batas sehingga secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{PDE} + \lambda \mathcal{L}_{BC} \quad (5)$$

dengan $\mathcal{L}_{PDE}$ merupakan residual persamaan diferensial, $\mathcal{L}_{BC}$ merupakan residual kondisi batas, sedangkan λ adalah faktor pembobot yang

mengatur kontribusi kondisi batas terhadap fungsi *loss*.

Persamaan Euler–Bernoulli yang digunakan pada penelitian ini dituliskan dalam bentuk tak berdimensi sebagai

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} = 1 \quad (6)$$

sehingga residual persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai

$$R_{PDE} = \frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} - 1 \quad (7)$$

Loss residual persamaan diferensial dihitung menggunakan pendekatan *Mean Squared Error (MSE)*,

$$\mathcal{L}_{PDE} = \frac{1}{N_c} \sum_{i=1}^{N_c} R_{PDE}(\bar{x}_i)^2 \quad (8)$$

dengan N_c merupakan jumlah titik *collocation* yang tersebar pada domain balok.

Pada penelitian ini kondisi batas esensial telah dipenuhi secara langsung melalui *shape function* sebagaimana ditunjukkan pada persamaan (14). Oleh karena itu, komponen $\mathcal{L}_{BC}$ digunakan untuk memastikan terpenuhinya kondisi batas alami pada ujung bebas balok, yaitu momen lentur dan gaya geser bernilai nol. Selama proses pelatihan, fungsi *loss* diminimalkan secara iteratif hingga diperoleh residual minimum sehingga solusi yang dihasilkan memenuhi persamaan Euler–Bernoulli dan kondisi batas balok kantilever.

2.6 Evaluasi Akurasi Model

Setelah proses pelatihan selesai, model *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) menghasilkan distribusi defleksi sepanjang balok kantilever yang kemudian dibandingkan dengan solusi analitik Euler–Bernoulli. Tingkat akurasi model dievaluasi menggunakan empat parameter statistik, yaitu *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Error* (MAE), koefisien determinasi (R^2), dan *Maximum Relative Error* (Max Error). Keempat parameter tersebut digunakan untuk mengukur tingkat kesesuaian antara hasil prediksi PINNs dan solusi analitik secara kuantitatif.

Root Mean Square Error (RMSE) digunakan untuk mengukur besarnya akar rata-rata kuadrat selisih antara nilai prediksi dan nilai analitik. Nilai RMSE yang semakin kecil menunjukkan bahwa hasil prediksi model semakin mendekati solusi analitik. Secara matematis, RMSE dihitung menggunakan

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (9)$$

dengan y_i merupakan nilai analitik, $\hat{y}_i$ adalah nilai hasil prediksi PINNs, dan n adalah jumlah titik evaluasi.

Selanjutnya, *Mean Absolute Error* (MAE) digunakan untuk menghitung rata-rata nilai absolut selisih antara hasil prediksi dan solusi analitik. Berbeda dengan RMSE, MAE memberikan ukuran kesalahan rata-rata tanpa memberikan bobot lebih besar terhadap galat yang besar. Nilai MAE dinyatakan sebagai

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (10)$$

Semakin kecil nilai MAE, semakin tinggi tingkat akurasi model dalam memprediksi distribusi defleksi.

Kinerja model juga dievaluasi menggunakan koefisien determinasi (R^2), yang menunjukkan seberapa baik hasil prediksi mampu menjelaskan variasi data analitik. Nilai R^2 berada pada rentang 0 hingga 1, di mana nilai yang semakin mendekati satu menunjukkan tingkat kesesuaian yang semakin baik antara hasil prediksi dan solusi analitik. Koefisien determinasi dihitung menggunakan

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (11)$$

dengan $\bar{y}$ merupakan rata-rata nilai analitik.

Selain ketiga parameter tersebut, penelitian ini juga menggunakan *Maximum Relative Error* (Max Error) untuk mengetahui galat relatif terbesar yang terjadi pada seluruh titik prediksi. Parameter ini memberikan informasi mengenai penyimpangan

maksimum model terhadap solusi analitik sehingga dapat digunakan untuk mengevaluasi kestabilan model di sepanjang domain balok. Maximum Relative Error dihitung menggunakan persamaan

$$\text{Max Error} = \max_i \left(\frac{|y_i - \hat{y}_i|}{|y_i|} \right) \times 100\% \quad (12)$$

Semakin kecil nilai RMSE, MAE, dan Maximum Relative Error, serta semakin mendekati satu nilai R^2 , menunjukkan bahwa model PINNs memiliki kemampuan prediksi yang semakin baik dan mampu merepresentasikan distribusi defleksi balok kantilever dengan tingkat akurasi yang tinggi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

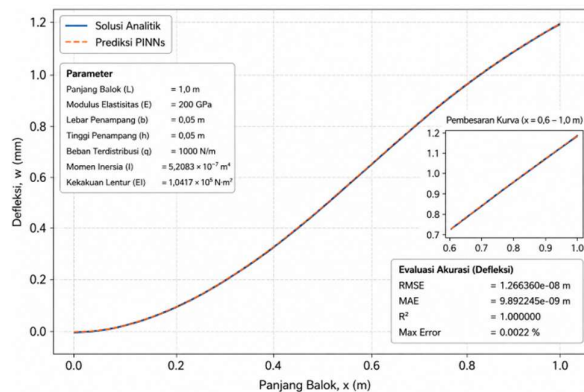
Bagian ini menyajikan hasil implementasi *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) dalam memprediksi distribusi defleksi balok kantilever Euler–Bernoulli yang menerima beban terdistribusi merata. Hasil prediksi dibandingkan dengan solusi analitik untuk mengevaluasi kemampuan model dalam merepresentasikan respons struktur. Evaluasi dilakukan melalui analisis konvergensi proses pelatihan, perbandingan distribusi defleksi, distribusi galat, serta parameter statistik yang menggambarkan tingkat akurasi model.

3.1 Prediksi Defleksi Balok

Setelah proses pelatihan selesai, model PINNs digunakan untuk memprediksi distribusi defleksi sepanjang balok kantilever. Hasil prediksi kemudian dibandingkan dengan solusi analitik berdasarkan teori Euler–Bernoulli seperti diperlihatkan pada Gambar 3.

Gambar 3 memperlihatkan perbandingan distribusi defleksi balok kantilever yang diperoleh menggunakan *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) dengan solusi analitik berdasarkan teori balok Euler–Bernoulli. Studi kasus dilakukan pada balok dengan panjang 1,0 m, lebar penampang 0,05 m, tinggi penampang 0,05 m, modulus elastisitas sebesar 200 GPa, serta menerima beban terdistribusi sebesar 1000 N/m. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh momen inersia

penampang sebesar $5,2083 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ dan kekakuan lentur sebesar $1,0417 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$.



Gambar 3. Perbandingan distribusi defleksi balok kantilever antara solusi analitik Euler–Bernoulli dan prediksi PINNs.

Pada Gambar 3 terlihat bahwa kurva prediksi PINNs hampir berhimpit dengan kurva solusi analitik pada seluruh panjang balok. Kesesuaian ini menunjukkan bahwa model PINNs mampu merepresentasikan perilaku defleksi balok secara kontinu dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi. Tidak terlihat adanya penyimpangan yang signifikan baik pada daerah dekat tumpuan maupun menuju ujung bebas balok, sehingga dapat disimpulkan bahwa solusi yang diperoleh telah memenuhi perilaku fisik yang diprediksi oleh teori Euler–Bernoulli.

Untuk memperjelas tingkat kesesuaian kedua kurva, Gambar 3 juga menyajikan pembesaran pada rentang $x = 0,6\text{--}1,0$ m. Pada daerah ini defleksi balok meningkat hingga mencapai nilai maksimum di ujung bebas. Hasil pembesaran menunjukkan bahwa kurva prediksi PINNs tetap mengikuti kurva analitik secara konsisten tanpa adanya deviasi yang berarti. Hal ini mengindikasikan bahwa model tidak hanya mampu memprediksi bentuk kurva secara umum, tetapi juga mempertahankan akurasi pada daerah dengan gradien defleksi yang lebih besar.

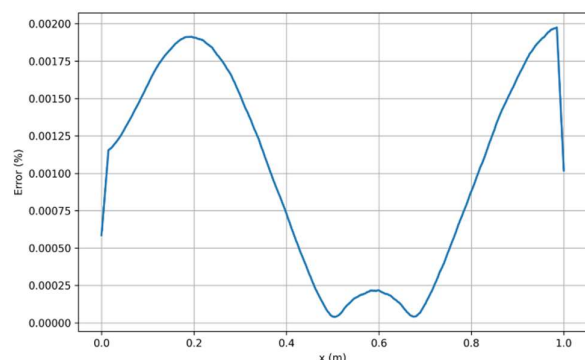
Evaluasi kuantitatif terhadap hasil prediksi menunjukkan nilai *Root Mean Square Error* (RMSE) sebesar $1,26636 \times 10^{-8} \text{ m}$, *Mean Absolute Error* (MAE) sebesar $9,89225 \times 10^{-9} \text{ m}$, koefisien determinasi (R^2) sebesar 1,000000, serta

Maximum Relative Error sebesar 0,0022%. Nilai RMSE dan MAE yang sangat kecil menunjukkan bahwa rata-rata selisih antara hasil prediksi PINNs dan solusi analitik berada pada orde 10^{-8} m , sedangkan nilai R^2 yang mendekati satu menunjukkan bahwa model mampu merepresentasikan hampir seluruh variasi distribusi defleksi balok. Selain itu, galat relatif maksimum yang hanya mencapai 0,0022% menunjukkan bahwa penyimpangan terbesar terhadap solusi analitik masih berada pada batas yang sangat kecil.

Hasil tersebut menunjukkan bahwa pendekatan PINNs mampu menyelesaikan persamaan diferensial Euler–Bernoulli dengan tingkat akurasi yang sangat tinggi tanpa memerlukan data eksperimen sebagai data pelatihan. Akurasi ini diperoleh karena proses pembelajaran jaringan tidak hanya meminimalkan kesalahan prediksi, tetapi juga memaksa solusi memenuhi persamaan diferensial dan kondisi batas yang mendeskripsikan perilaku fisik balok. Dengan demikian, model PINNs menghasilkan solusi yang konsisten dengan hukum fisika sekaligus memiliki kemampuan prediksi yang sangat baik terhadap distribusi defleksi sepanjang bentang balok.

3.2 Analisis Distribusi Error

Untuk mengetahui tingkat kesalahan prediksi model, dilakukan analisis distribusi galat relatif sepanjang balok.



Gambar 4. Distribusi galat (error) prediksi defleksi yang dihasilkan oleh model PINNs terhadap solusi analitik.

Pada Gambar 4 menunjukkan distribusi galat relatif yang digunakan untuk mengevaluasi konsistensi akurasi model pada setiap titik di dalam domain komputasi, sehingga tidak hanya memberikan informasi mengenai besar kesalahan secara keseluruhan, tetapi juga menunjukkan lokasi terjadinya penyimpangan prediksi.

Secara umum, galat relatif berada pada kisaran yang sangat kecil, yaitu sekitar 0,00004% hingga 0,0020%. Nilai tersebut jauh lebih kecil dibandingkan batas toleransi kesalahan yang umum digunakan pada analisis numerik struktur, sehingga menunjukkan bahwa prediksi PINNs memiliki tingkat akurasi yang sangat tinggi di seluruh panjang balok. Selain itu, tidak ditemukan lonjakan galat yang signifikan pada daerah tertentu, yang mengindikasikan bahwa model mampu mempertahankan kestabilan prediksi selama proses komputasi.

Bentuk kurva pada Gambar 4 memperlihatkan bahwa galat relatif mengalami fluktuasi kecil sepanjang domain balok. Nilai galat relatif cenderung meningkat pada daerah dekat ujung jepit ($x \approx 0,2$ m) dan kembali meningkat mendekati ujung bebas ($x \approx 1,0$ m), sedangkan nilai minimum terjadi pada bagian tengah balok sekitar $x = 0,5-0,7$ m. Meskipun demikian, seluruh variasi tersebut masih berada pada orde $10^{-3}\%$, sehingga secara praktis tidak memberikan pengaruh yang berarti terhadap hasil prediksi defleksi.

Fluktuasi galat relatif tersebut merupakan karakteristik yang umum dijumpai pada pendekatan Physics-Informed Neural Networks. Selama proses pelatihan, jaringan saraf berupaya meminimalkan residual persamaan diferensial Euler–Bernoulli beserta kondisi batas secara simultan. Akibatnya, distribusi galat tidak selalu seragam pada setiap titik, namun tetap berada pada tingkat yang sangat rendah karena solusi yang dihasilkan selalu dikendalikan oleh hukum fisika yang mendasarinya.

Hasil ini konsisten dengan evaluasi kuantitatif pada Gambar 3 yang menunjukkan nilai RMSE sebesar $1,26636 \times 10^{-8}$ m, MAE sebesar $9,89225 \times$

10^{-9} m, koefisien determinasi (R^2) sebesar 1,000000, serta galat relatif maksimum sebesar 0,0022%. Dengan demikian, distribusi galat relatif pada Gambar 4 memberikan bukti bahwa model PINNs tidak hanya memiliki akurasi global yang tinggi, tetapi juga mampu mempertahankan akurasi lokal secara konsisten di sepanjang bentang balok.

Secara keseluruhan, hasil pada Gambar 3 dan Gambar 4 menunjukkan bahwa pendekatan PINNs mampu menghasilkan prediksi defleksi balok yang hampir identik dengan solusi analitik. Hal ini menunjukkan bahwa metode yang diterapkan memiliki kemampuan yang baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial Euler–Bernoulli tanpa memerlukan data eksperimen sebagai data pelatihan, sehingga berpotensi menjadi alternatif yang efisien untuk analisis defleksi struktur balok.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa *Physics-Informed Neural Networks* (PINNs) merupakan pendekatan yang efektif untuk memprediksi distribusi defleksi balok kantilever berdasarkan teori Euler–Bernoulli tanpa memerlukan data eksperimen sebagai data pelatihan. Model yang dikembangkan menunjukkan tingkat akurasi yang sangat tinggi dengan nilai RMSE sebesar $1,26636 \times 10^{-8}$ m, MAE sebesar $9,89225 \times 10^{-9}$ m, R^2 sebesar 1,000000, dan galat relatif maksimum sebesar 0,0022%. Selain itu, distribusi galat relatif yang rendah dan merata di sepanjang bentang balok mengindikasikan bahwa model memiliki kestabilan dan kemampuan generalisasi yang sangat baik.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, beberapa saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Melakukan validasi model menggunakan data eksperimen maupun hasil simulasi Finite Element Method (FEM) untuk mengevaluasi kinerja model pada kondisi yang lebih realistis.

2. Mengembangkan model PINNs untuk analisis dua dimensi dan tiga dimensi, seperti pelat, cangkang, dan struktur rangka, sehingga cakupan aplikasinya menjadi lebih luas.
3. Menerapkan PINNs pada permasalahan mekanika struktur lainnya, seperti analisis tegangan, getaran, buckling, dan propagasi retak, sehingga potensi metode ini dalam bidang teknik mesin dan teknik sipil dapat dieksplorasi lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Duque, D., *A derivation of the beam equation*. European Journal of Physics, 2016. 37(1): p. 015002.
- [2]. Chandra, S., *Stability of beam-column by geometrically nonlinear analysis*. Australian Journal of Structural Engineering, 2023. 24(4): p. 342-349.
- [3]. Min, Y., et al., *Non-uniform thickness design for steel bridge deck and steel bridge deck pavement: Feasibility and stress analysis*. Structures, 2026. 86: p. 111268.
- [4]. Ju, H., et al., *Deflection prediction and early warning for long-span bridges using a fusion ATT-BiGRU model and real-time updated thresholds*. Structures, 2025. 76: p. 109061.
- [5]. Ovesy, H.R., A. Gharibi, and R. Khaki, *Combination of experiments and CFD analysis for in-flight wings deflections estimation*. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 2020. 93(1): p. 190-204.
- [6]. Yang, B., *Chapter 2 - Static analysis of Euler-Bernoulli beams*, in *Stress, Strain, and Structural Dynamics (Second Edition)*. 2023, Academic Press. p. 11-70.
- [7]. Kollár, L.P. and G. Tarján, *3 - Elastic beams and columns*, in *Mechanics of Civil Engineering Structures*. 2021, Woodhead Publishing. p. 67-153.
- [8]. Wang, H. and Q.-H. Qin, *Chapter 2 - Mechanics of solids and structures*, in *Methods of Fundamental Solutions in Solid Mechanics*. 2019, Elsevier. p. 53-90.
- [9]. Fleischmann, D. and L. Könözy *On a Novel Approximate Solution to the Inhomogeneous Euler-Bernoulli Equation with an Application to Aeroelastics*. Aerospace, 2021. 8, 356 DOI: 10.3390/aerospace8110356.
- [10]. Malla, A. and S. Natarajan, *Fragile points method for Euler-Bernoulli beams*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2024. 106: p. 105319.
- [11]. Hartlieb, E., et al., *On a newly developed transport method for sensitive cradled panel paintings*. Journal of Cultural Heritage, 2024. 70: p. 441-449.
- [12]. Karniadakis, G.E., et al., *Physics-informed machine learning*. Nature Reviews Physics, 2021. 3(6): p. 422-440.
- [13]. Lu, L., et al., *DeepXDE: A Deep Learning Library for Solving Differential Equations*. SIAM Review, 2021. 63(1): p. 208-228.
- [14]. Raissi, M., P. Perdikaris, and G.E. Karniadakis, *Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations*. Journal of Computational Physics, 2019. 378: p. 686-707.
- [15]. Cuomo, S., et al., *Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next*. Journal of Scientific Computing, 2022. 92(3): p. 88.
- [16]. Ferdinand P. Beer, E.R.J., John T. DeWolf, David Mazurek, *Mechanics of Materials*. 8th ed. 2019: McGraw Hill. 896.